

试论《杨辉算法》与南宋经济领域中的几个计量数学问题

吕变庭

内容提要:从经济史的角度重新解读《杨辉算法》,我们会发现南宋在许多经济领域都用到了计量数学,像各种形状的山田丈量方法、日常商业活动中的秤衡与斤两制度等。由于南宋地方政府与民间在较长时期内始终没有形成统一的秤衡与斤两制度,因而给南宋商业经济的发展造成了一定负面影响,而杨辉通过算题这种特殊媒介,以灵活多样的方式讨论了正斛法和零两求分定数等问题,从而对南宋计量数学的发展产生了积极影响。作为计量数学发展演变的重要阶段,南宋正好处于由筹算向珠算转变的历史时期,杨辉不遗余力地推广乘除捷法,以不断适应计量数学发展的客观需要。《杨辉算法》中的捷法运算对于现代基础数学与实用数学的发展仍具有一定参考价值。

关键词:杨辉算法 经济 南宋 计量数学

《杨辉算法》包括《乘除通变本末》《田亩比类乘除捷法》和《续古摘奇算法》3部书,此外还有《日用算法》残卷,它们是南宋实用算书的代表作。以往史学界对书中所蕴含的数学思想及其成就,经多方面的探讨,已取得了丰硕成果。与之相较,对于《杨辉算法》中的经济史价值,学界仍重视不够。故此,笔者曾撰有《杨辉算书与南宋社会经济诸关系初探》一文,^①主要围绕山间坡地与田亩计量、土地买卖与田亩比类算题、从头子钱和不系省钱看南宋的杂税、南宋的稻谷产量与稻谷出米率、月息与南宋江浙地区的借贷关系、物价与南宋经济的发展等问题,初步揭示了杨辉算书与南宋诸多经济现象之间的密切关系。然而,随着进一步考索,我们发现《杨辉算法》中还有许多反映南宋经济领域现实状况的史料尚待继续深入研究,例如《杨辉算法》中的计量数学与经济史之间的关系问题,学界虽有关关注,^②但迄今未见系统研究,故本文仅就这个问题,拟在前人研究成果的基础上,尝试做进一步探索,不足之处请方家斧正。

一、《田亩比类乘除捷法》与南宋的山田丈量

南宋人地矛盾主要有两种表现形式:人多地少与人稀地广。前者主要分布在江浙、福建、四川平原等人口密度较高的少数经济发达区域,如婺州“浦江居山僻间,地狭人众,一寸之土垦辟无遗”;^③福建南平“四望无平地,山田级级高”。^④后者则主要分布在湖北、广南东西两路等地,如南宋时“湖北

[作者简介]吕变庭,河北大学宋史研究中心教授,保定,071002,邮箱:zpiyyn@qq.com。

① 吕变庭:《杨辉算书与南宋社会经济诸关系初探》,《中国社会经济史研究》2014年第1期。

② 刘秋根:《试论两宋高利贷资本利息问题》,《中国经济史研究》1987年第3期;郭正忠:《三至十四世纪中国的权衡量》,北京:中国社会科学出版社1993年版,第139—141页;汪圣铎:《两宋财政史》,北京:中华书局1995年版,第344—358页;梅荣照:《宋元数学中的思想方法和理论》,《自然科学史研究》1990年第1期;吴文俊主编:《中国数学史大系》第5卷《两宋》,北京师范大学出版社2000年版,第730—738页;程民生:《宋代物价研究》,北京:人民出版社2008年版,第38—267页。

③ [宋]倪朴:《倪石陵书》卷1《投巩宪新田利害劄子》,《景印文渊阁四库全书》第1152册,台北:商务印书馆1986年版,第17页。

④ [宋]刘克庄编,胡问依、王皓斐校注:《后村千家诗校注》卷15《地理门·溪十三首》,贵阳:贵州人民出版社1986年版,第419页。

地广人稀,耕种灭裂,种而不蒔”;^①又“广南两路,自潮州而南,居民鲜少,山荒甚多”,^②等等。

因杨辉系钱塘(今浙江杭州)人,长期生活在台州(今浙江临海)、苏州、钱塘等地,对这一带地区的人地矛盾深有感触。由于耕地与赋税关系密切,且是宋代最敏感和最复杂的民生问题之一,故各层士人关注颇多。我们知道,丈量田亩是政府征收赋税的基础。从这个角度看,杨辉著《田亩比类乘除捷法》关乎国计民生,意义非同寻常。为了方便丈量,宋代的田亩以“直田”为常态,至于“直田”的形状,近似“井田”。如图1所示。



图1 敦煌莫高窟61窟宋代壁画中的“耕作图”

这是一幅反映宋代耕地、收割和打场景象的“耕作图”,见于敦煌莫高窟61窟宋代壁画中,图中所示农田形状即“直田”。然而,南宋田亩的情形相当复杂,如宣和元年(1119),北宋统治者有“浙西逃田、天荒、草田、葑茭荡、湖砾、退滩等地,皆计籍召佃立租,以供应奉”之令。^③至于这些田亩的形状是个什么样子,史载不详,故无法确知。

宋代山区的农业开发应是当时最活跃的经济领域,也是缓解人口压力的重要出路之一。大量人口向山区转移,必然会出现“深山穷谷,人迹所不到,往往有民居”的情况。^④由于山区自然地理的限制,人们开荒只能因山而宜,于是梯田这种新的田亩形式应运而生。漆侠《宋代经济史》及韩茂莉《宋代农业地理》特别讲到福建之外的东南丘陵山地,如徽州、台州、严州及明州等地,梯田已经非常普遍了。据陈耆卿统计,台州田亩有田(指水田)、地和山三种类型,其中田有2 628 283亩,地有9 482 22亩,山有1 753 538亩,山与地的和比田多。^⑤明州山区居民“从山巅直到水湄,‘累石墾土’,将所有坡地都建为梯田”,^⑥反映了梯田使东南丘陵山地生态环境的变化十分显著。在这里,我们不拟讨论梯田对东南丘陵山地生态环境所造成的严重后果,因为在当时特定历史条件下,对于广大山居民众来说,如何生存和繁衍才是头等重要的事情。当然,通过“累石墾土”开出来的山田,田面大小不一,且形状亦各不相同,有些小的山田甚至“指十数级不能为一亩”,^⑦然其耕种的劳动强度却

① [宋]彭龟年:《止堂集》卷6《乞权住湖北和糶疏》,《景印文渊阁四库全书》第1155册,第831页。

② [宋]曹勋:《松隐文集》卷23《上皇帝书十四事》,《景印文渊阁四库全书》第1129册,第468页。

③ 《宋史》卷174《食货上二·方田赋税》,北京:中华书局1985年版,第4212页。

④ [宋]李纲:《桃源行诗序》,《李纲全集》(上),长沙:岳麓书社2004年版,第135页。

⑤ 漆侠:《宋代经济史》(上),北京:中华书局2009年版,第65页。

⑥ 韩茂莉:《宋代农业地理》,太原:山西古籍出版社1993年版,第139页。

⑦ [宋]罗愿:《新安志》卷2《叙贡赋》,《景印文渊阁四库全书》第485册,第369页。

很大,如皖南山区有“凿山而田,高耕入云者,十半其力”之说。^①可惜,载有福建、浙江等山田面积与形状的宋代《鱼鳞图册》实物,今已不存。不过,由明代传世的《鱼鳞图册》知,徽州梯田“层累而上”,山田单位面积小,土地清丈不易。故此,程大位在《算法统宗》卷3中绘制有“新制丈量步车图”,^②以解决各种几何田亩的清丈问题。经过汇总,程大位共给出了22种几何田亩的计算问题,即方田、直田、圆田、覆月田、弧矢田、圭形田、三角田、梭形田、斜圭田、梯形田、斜形田、眉形田、牛角田、榄形田、三广田、勾股田、四不等形田、五不等田、倒顺二圭田、三圭形田、六角形图田和八角形图田等。有学者认为,上述几何田亩的算法,是程大位“总结了徽州土地丈量的经验”。^③例如,《鱼鳞图册》所载徽州梯田之1号田亩仅有5分5厘多,却被分割为12级地块,而另1号田亩仅仅才2分2厘,则被分割为15级地块。^④恰如漆侠所言,这是“在山石的罅隙中耕锄”。^⑤既然如此,那么我们就可以说,杨辉《田亩比类乘除捷法》同样是总结了台州、明州等地土地丈量的实际经验。其讲的虽是数学问题,但折射出来的却是南宋最为迫切的民生问题,即如何解决山地居民的生计问题。在这个历史过程中,自然界不得不为之付出巨大的代价。

诚如宋人所言,山地田亩的产量一般都不高,严州山地田亩“苗稼疏薄”,所收常“不足食”。^⑥然而,对于宋代山地的粮食产量,我们应以历史和辩证的眼光来看待。韩茂莉指出,东南丘陵山区的开发有两点值得注意:第一,“在山区的农业开发过程中,人们首先利用的土地一般是自然条件最好的山间盆地,然后逐渐向山麓地带推进,最后延伸到条件较差的坡地”。^⑦吕祖谦曾针对严州的山田与水田的分布状况,作出“山居其八,田居其二”的估算,^⑧也就是说,水田与山地(指旱地)的比例为2:8。当然,在这“居八”的份额里,山间盆地和山麓确之地产量是有高低差异的。第二,从“烧畚”到“细种”,耕作技术发生了变化。考察宋代明州、严州、处州、温州和歙州等人口增长率,其中人口增长率超过100%的州有80%以上处于丘陵山区,所以“相对平原地区,丘陵山区呈现出人口高值增长的趋势”。^⑨可是,在“一寸之土,垦辟无遗”的特定背景下,^⑩想要山地养活更多的居民,惟有改进耕作技术一途。因此,陈著在《嵊县劝农文》中鼓励人们“细种为生”,^⑪变粗放为细作。此时,如何对丘陵山地田亩的产量进行科学评估,就显得愈来愈重要了。杨辉根据东南丘陵山地的不同形状,一共抽象和提炼出24种几何田亩(即田亩模型),成为田主赋税的基本量纲。具体内容见表1。

表1 《田亩比类乘除捷法》所见有代表性的山地几何田亩

序号	名称	几何形状	序号	名称	几何形状
1	直田		13	墙田	

① [宋]方岳:《秋崖先生小稿》卷38《徽州平粟仓记》,[明]解缙等编:《永乐大典(全新校勘简体横排珍藏版)》第7卷,北京:大众文艺出版社2009年版,第2188页。

② [明]程大位著,梅荣照等校释:《算法统宗校释》,合肥:安徽教育出版社1990年版,第228页。

③ 汪庆元:《明中期徽州绩溪鱼鳞册初探》,袁行需主编:《国学研究》第19卷,北京大学出版社2007年版,第117页。

④ 栾成显:《经济与文化互动——徽商兴衰的一个重要启示》,国家图书馆编:《部级领导干部历史文化讲座·资政卷》(下),北京:国家图书馆出版社2010年版,第455页。

⑤ 漆侠:《宋代经济史》(上),第65页。

⑥ [宋]吕祖谦:《东莱集》卷3《为张严州作乞免丁钱奏状》,《景印文渊阁四库全书》第1150册,第25页。

⑦ 韩茂莉:《宋代农业地理》,第134页。

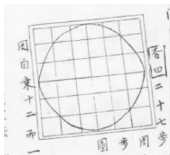

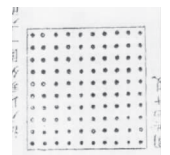
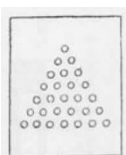
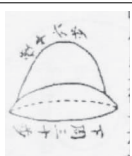
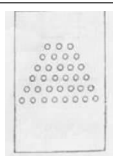


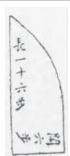


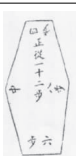
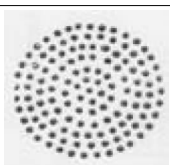
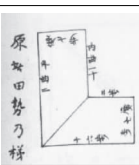
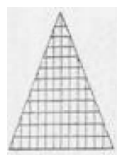
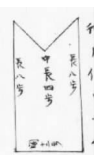
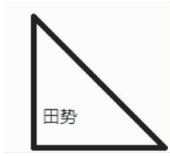
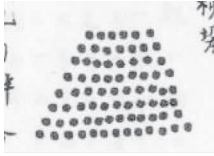
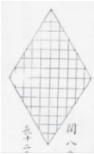

⑧ [宋]吕祖谦:《东莱集》卷3《为张严州作乞免丁钱奏状》,《景印文渊阁四库全书》第1150册,第26页。

⑨ 韩茂莉:《宋代农业地理》,第133—134页。

⑩ 倪朴:《倪石陵书》卷1《投巩宪新田利害劄子》,第1152—17页。

⑪ [宋]陈著:《本堂集》卷52《嵊县劝农文》,《景印文渊阁四库全书》第1182册,第257页。

续表 1

序号	名称	几何形状	序号	名称	几何形状
2	圆田		14	萧田	
3	方箭		15	圭垛	
4	碗田		16	梯垛	
5	丘田		17	腰鼓田	
6	牛角田		18	鼓田	
7	环田		19	三广田	
8	圆箭		20	曲尺田	
9	圭田		21	箭筈田	
10	勾股田		22	小梯垛	
11	梭田		23	大梯垛	

续表 1

序号	名称	几何形状	序号	名称	几何形状
12	梯田		24	箭翎田	

上述东南丘陵山地田亩的几何模型,由于是来自实际的丈量经验,如“台州量田图”中有曲尺田、箭筈田和箭翎田等,^①又台州黄岩县围量田图有梭田棣,及台州量田图有牛角田等,^②可以说基本上囊括了南宋“经界”过程中所遇到的各种形状的田亩。一旦这些实际问题被模型化之后,人们就又针对性地建立起一套符合简捷原则的解题方法。从《九章算术》到《田亩比类乘除捷法》,一以贯之,中国算学家形成了具有中国特色的数学逻辑体系,即先“从实际生活中分析出数量关系,建立数学模型”,然后再“从研究具体的数学问题入手,通过抽象与归纳而得到解决问题的数学方法”。^③当然,在杨辉看来,“解决问题的数学方法”不能复杂,也不能不易学习和掌握。所以,鉴于几何田亩与田亩产量的科学评估之密切关联,杨辉除了重点凸显《田亩比类乘除捷法》的实用价值外,更加追求算法的简捷与精确。例如,杨辉把属于“田亩”的概念直接用于带从开抽象的方、益积开方、减从开方和益隅开方等一般算法之中,从而使那些具体概念演变为一套以“机械化”为特色的求解代数方程的方法,不仅易于操作,而且更易于推广。^④这样,《田亩比类乘除捷法》就成为中国古代实用数学的一部典型著作,它对于元明清乃至我国现代数学的发展都具有重要的典范意义。华罗庚在谈到“优选”思想的精髓时说:“在具有各种互相制约、互相影响的因素的统一体中,寻求一个最合理(依某一目的,如最经济,最省人力)的解答便是一个数学问题,这就是‘多、快、好、省’的具体体现。”^⑤尽管华罗庚与杨辉生活在不同的历史空间,但是他们的数学思想却是一致的和可通约的。

二、《续古摘奇算法》中的正斛法及其捷法运算

“斛”是我国古代容量单位,它的变动关乎民生大计,故杨辉在《续古摘奇算法》中用专篇来讨论“正斛法”,足见其对这个问题的重视程度。杨辉对“斛”制变革的历史做了这样的描述:

《夏侯阳》仓曹云:古者凿池,方一尺,深一尺六寸二分,受粟一斛。至汉王莽改铸铜斛,用深一尺九寸二分。至宋元嘉二年,徐受重铸,用二尺三寸九分。至梁大同元年,甄鸾校之,用二尺九寸二分。然异时事变,斗尺(斛)不同,以古就今,临时较定,始可行用。若欲审之,以掘地作穴,方广三尺已下。以今时斗,量米一斛,置诸穴中,概令平满,如有少剩,临时增减,取米适平,然后出之,径量以知深浅,乃可为斛法定数。辉伏睹京城见用官斗号杭州百合,浙郡一体行用。未较积尺积寸者,盖斗势上阔下狭,维板凸突,又有提梁,难于取用。况栲栳藤斗,循习为之。今将官升与市尺较订,少补日用之万一。每立方三寸,谓四维各三寸,高三寸,积二十七寸。受粟一升;每方五寸,深五寸四分,积一百三十五寸。受粟五升;每方一尺,深二寸七分,积二百七十寸。受粟一斗;每方一尺,深一尺三寸五分,受粟五斗。^⑥

① [宋]杨辉:《杨辉算法·田亩比类乘除捷法》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,郑州:河南教育出版社1993年版,第1082—1083页。

② 杨辉:《杨辉算法·田亩比类乘除捷法》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1080、1078页。

③ 戴再平:《数学方法与解题研究》,北京:高等教育出版社1996年版,第6页。

④ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,武汉:湖北教育出版社1996年版,第171页。

⑤ 华罗庚:《数学的用场与发展》,《现代科学技术简介》编辑组编:《现代科学技术简介》,北京:科学出版社1978年版,第221页。

⑥ 杨辉:《杨辉算法·续古摘奇算法》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1103页。

关于此段量制史料,吴文俊主编《中国数学史大系》第5卷及郭正忠《三至十四世纪中国的权衡度量》等都有较细致的阐释。其中尤为值得注意的现象是宋代的斛制非常混乱,既有中央朝廷之量、各种地方官量、专用官量以及军量和学量等,同时又有乡村居民以及城镇工商业自制和使用的民间量器,加上因“栲栳藤”本身的原因,制作很不规则,“既有按法量或官量规格复制的合法量器,也有违反规格私造而应予取缔的非法量器,还有本属非法而又为官府所默许、认可的量器”等。^①为了增收多取,官府往往加大量器来收取,是谓“加耗”,名色至多。此外,尚有20多种加斛与加斗,从而使民众的税负更加沉重。所以,宋代斛制的变化反映了统治阶级残酷剥削的一面,而从数学史的角度,我们通过对量斛的容积换算,无疑能够加深对其剥削性质的认识。宋代浙尺有3种形制:27.4厘米、28.3厘米及31厘米。依此计算,则宋代的“杭州百合”官斗分别为:

$$[(0.3 \times 27.4)^3] \approx 555 \text{ 毫升}; [(0.3 \times 28.3)^3] \approx 612 \text{ 毫升}; [(0.3 \times 31)^3] \approx 804 \text{ 毫升}。$$

宋代以前,以十斗为一斛,而北宋末南宋初则改五斗为一升。^②斛型无定制:“既有圆体五斗斛,又有方体五斗斛;既有敞口斛,又有狭口斛。”^③正是在这样的历史背景下,杨辉才提出了“正斛法”的主张,即提出订正容量单位的标准。

在“正斛法”下,有“求圆斛术”,主要讲述立方体量器与圆柱体量器等容积的换算方法。然而,杨辉给出的却是其“方体五斗斛”的基本标准:“每方一尺,深二尺七寸,受粟一石。”^④此类官斛的容积为2700立方寸,若仍按上述宋代厘米尺计算,则1石斛容量分别为:55541毫升、61196毫升和80436毫升,是前述官升容积的100倍。

于是,如何简化不同斛石之间的计量与折算,就成为杨辉《乘除通变算宝》卷中的主要内容之一。下面是杨辉给出的一道例题:“(米)足斛二百二十九石八升,问为八斗三升法斛几何?答曰:二百七十六石。”^⑤又《法算取用本末》卷下载:“米八百九十石,每石省斛八斗三升,问为足斛几何?答曰:七百三十八石七斗。”^⑥题中出现了足斛与省斛之间的换算。据郭正忠研究,宋代仅斛型至少有13种以上,其量制有135升之石,110升之石,83升之石,65升之石等多种,此处“省斛(83升)之一石,即为省斛(83升)之一斛,仅为足斛容积的0.83石”。^⑦

此外,还有足秤与省秤之间的折算,如题云:“足秤一百二十六斤,问为省秤多少?答曰:一百五十七斤半。”^⑧“足秤二百三十二斤,问展省秤多少?答曰:二百九十斤。”^⑨在这里,“足秤”是指200钱或20两为1斤的秤,而“省秤”则是指16两为1斤之“官司省秤”,两者的比例为20:16,或10:8,或5:4。^⑩故方回在《续古今考》中述及:“有定秤二百文铜钱重,有二百二十钱秤。民间买卖行用,鱼肉二百钱秤,薪炭粗物二百二十钱秤。官司省秤十六两,计一百六十钱重。民间金、银、珠宝、香药细色,并用省秤。”^⑪

可见,200铜钱重即20两,此为“足秤”或云“足斤”,行用于“民间买卖”及“鱼肉”买卖。220铜钱重即22两,此为“加秤”或云“加斤”,行用于民间“薪炭粗物”买卖。160铜钱重即16两,此为“省秤”或云“省斤”,行用于官府及“民间金、银、珠宝、香药细色”等买卖。当然,南宋官民因不同地区和

① 郭正忠:《三至十四世纪中国的权衡度量》,第371页。

② 郭正忠:《三至十四世纪中国的权衡度量》,第395页。

③ 郭正忠:《三至十四世纪中国的权衡度量》,第397页。

④ 杨辉:《杨辉算法·续古摘奇算法》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1103页。

⑤ 杨辉:《杨辉算法·乘除通变本末·算法通变本末》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1059页。

⑥ 杨辉:《杨辉算法·乘除通变本末·法算取用本末》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1064页。

⑦ 郭正忠:《三至十四世纪中国的权衡度量》,第394页。

⑧ 杨辉:《杨辉算法·乘除通变本末·法算取用本末》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1064页。

⑨ 杨辉:《杨辉算法·乘除通变本末·法算取用本末》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1067页。

⑩ 郭正忠:《三至十四世纪中国的权衡度量》,第141页。

⑪ [元]方回:《续古今考》卷19《近代尺斗秤》,《景印文渊阁四库全书》第853册,第388页。

不同专业部门,所行用的秤衡及斤两制度亦各不相同,实际情形比较复杂。仅江浙地区就有4种秤,“收谷一秤,十六斤,二百足铜钱为一斤。或十五斤,十四斤。糯谷,十三斤。所至江浙不同”。^① 所以在这里,杨辉固然旨在普及算法知识,但从客观上看,其却积极推动了政府统一秤衡与斤两制度。《日用算法》有题云:“今有物一百一十二斤,足秤,问为省秤几何? 答曰:一百四十斤。”^②

根据题中术文“以斤数为实,身外加二五”^③知,杨辉在题中所用是标准的“足秤”与“省秤”,则依题意,有 $112 \text{ 斤} \times 20/16 = 112 \text{ 斤} \times 1.25 = 140 \text{ 斤}$ 。

又题云:“今有物三百九十一斤四两,省秤。问足秤几何? 答曰:三百一十三斤。”^④

由上题算法知, $(391 + \frac{4}{16} \text{ 斤}) \times 16/20 = 391.25 \text{ 斤} \times 0.8 = 313 \text{ 斤}$ 。

在宋代,度量衡制改为十进位后,斤两仍为十六进位制,计算时比较繁复和麻烦。因此,杨辉在《日用算法》中编制了“斤价化两价”歌诀,以简化计算。其诀云:“一求,隔位六二五;二求,退位一二五;三求,一八七五记;四求,改曰二十五;五求,三一二五是;六求,两价三三七五;七求,四三七五置;八求,转身变作五。”^⑤

用现代语言解释就是, $1 \text{ 两} = \frac{1}{16} \text{ 斤} = 0.0625 \text{ 斤}$, $2 \text{ 两} = \frac{2}{16} \text{ 斤} = 0.125 \text{ 斤}$,

$3 \text{ 两} = \frac{3}{16} \text{ 斤} = 0.1875 \text{ 斤}$, $4 \text{ 两} = \frac{4}{16} \text{ 斤} = 0.25 \text{ 斤}$, $5 \text{ 两} = \frac{5}{16} \text{ 斤} = 0.3125 \text{ 斤}$,

$6 \text{ 两} = \frac{6}{16} \text{ 斤} = 0.375 \text{ 斤}$, $7 \text{ 两} = \frac{7}{16} \text{ 斤} = 0.4375 \text{ 斤}$, $8 \text{ 两} = \frac{8}{16} \text{ 斤} = 0.5 \text{ 斤}$ 。

所以在具体的筹算实践中,杨辉总结了民间速算的方法和经验,并加以歌诀化,因而使算术捷法得到广泛传播。例如,乘数“二百一至三百”用杂法:

二百一,加三四加五;二百二,隔位加一倍之;二百三,七因两折加一六;二百四,加二加七;二百五,折半身前四因;二百六,倍之隔位加三;二百七,加三八加五;二百八,加三加六;二百九,加一加九;二一一,连身加一一;二一二,倍之隔位加六;二一三,加四二加五;二一四,倍之隔位加七;二一五,加七二三折半;二一六,加二加八;二一七,七因两折加二四;二一八,倍之隔位加九……二九八,二因加四九;二九九,加三退七七;三百,二因加五。^⑥

所谓“二百一,加三四加五”是指当201作乘数时,先对被乘数作加34运算,接着再对所得结果作加5运算。当用202作乘数时,需先对被乘数作“隔位加一”(即对被乘数进两位,另加上原被乘数与1的乘积)的运算,然后再对所得结果加倍。其余类推,不作赘述。上述引文为杨辉“加因代乘三百题”中的后半部分,其算法多用“定身乘法”“一位乘法”“补数乘法”以及“折半”和兼用加、因、损、折几种算法,独不见“飞归法”。因此,清人李锐说:“《通变》卷内有代乘代除各三百题,今市井俗人所谓飞归法,正复相似。”^⑦实际上,这是对杨辉算法的误解。对此,华印椿已有拨正。^⑧当然,用现代珠算的观点看,杨辉上述方法未必简捷,但是在当时的历史条件下,《法算取用本末》所介绍的“代乘代除”法,对于筹算工具的改革和民间算法之捷化,起到了重要的推动作用,甚至有些算法,经过后人的

① 方回:《续古今考》卷18《附论班固计井田百亩岁入岁出》,第853—367页。

② 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第456页。

③ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第456页。

④ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第456页。

⑤ 参见钱宝琮《中国数学史》,李俨、钱宝琮:《李俨钱宝琮科学史全集》第5卷,沈阳:辽宁教育出版社1998年版,第142页。

⑥ 杨辉:《杨辉算法·乘除通变本末·法算取用本末》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》第1册,第1066页。

⑦ [清]李锐:《杨辉算法跋》,[清]宋景昌:《杨辉算法札记》,《丛书集成新编》第42册,台湾:新文丰出版公司1985年版,第612页。

⑧ 华印椿:《中国珠算史稿》,北京:中国财政经济出版社1987年版,第488页。

进一步补充和完善,直到今天都有一定的应用价值。例如,中国台湾的王文佩通过长期的数学教学实践,发现对于中等程度的学生而言,“在学习过程中,对于基本观念的再次提醒、足够的示范及演练,确实有其存在的必要性。杨辉在乘除法的各‘三百题’,也为初学者和中等程度学习者,提供了更多的范例及学习机会。”^①

三、《日用算法》中的“零两求分定数”问题

唐宋度量衡的量值愈来愈精确,这是唐宋变革的重要内容之一。例如,唐朝改隋朝以前的铢钱制为铢累钱制,规定每1钱等于2铢4累,而每10钱等于1两。入宋后,原来的铢累制已经无法适应宋代商品经济,尤其是微观计息和中药计量发展过程中所出现的新情况和新问题。于是,宋代废除了唐朝的铢累量值,而代之以两、钱、分、厘、毫、丝。据载,北宋刘承珪曾创制了比较精密和灵敏的1两戥秤(亦称“厘戥”,是一种单杠杆不等臂称器)和1钱半戥秤,^②最小可称量1厘,合今0.04克,用于金银、药物等微量物品称重。然而,南宋的度量衡规模标准十分混乱,导致商贾及金融领域“分”与“两”的换算日趋多元化,故杨辉在《日用算法》中把“零两求分定数”作为一个独立问题进行专门阐释,目的在于尽可能将两分换算标准化。其“零两求分定数”云:

一两,六厘二毫半;二两,一分二厘半;三两,一分八厘七毫半;四两,二分半;五两,三分一厘二毫半;六两,三分七厘半;七两,四分三厘七毫半;八两,五分;九两,五分六厘二毫半;十两,六分二厘半;十一两,六分八厘七毫半;十二两,七分半;十三两,八分一厘二毫半;十四两,八分七厘半;十五两,九分三厘七毫半;十六两,十分;分还两,用加二五。^③

表2 零两求分定数表

两值(16两)	求分定数	厘毫丝	十进制加法	换算为厘
1两	6厘2毫半	6厘2毫5丝		6.25
2两	1分2厘半	1分2厘5毫	6厘2毫5丝+6厘2毫5丝=1分2厘5毫	12.5
3两	1分8厘7毫半	1分8厘7毫5丝	1分2厘5毫+6厘2毫5丝=1分8厘7毫5丝	18.75
4两	2分半	2分5厘	1分8厘7毫5丝+6厘2毫5丝=2分5厘	25
5两	3分1厘2毫半	3分1厘2毫5丝	2分5厘+6厘2毫5丝=3分1厘2毫5丝	31.25
6两	3分7厘半	3分7厘5毫	3分1厘2毫5丝+6厘2毫5丝=3分7厘5毫	37.5
7两	4分3厘7毫半	4分3厘7毫5丝	3分7厘5毫+6厘2毫5丝=4分3厘7毫5丝	43.75
8两	5分	5分0厘	4分3厘7毫5丝+6厘2毫5丝=5分0厘	50
9两	5分6厘2毫半	5分6厘2毫5丝	5分0厘+6厘2毫5丝=5分6厘2毫5丝	56.25
10两	6分2厘半	6分2厘5毫	5分6厘2毫5丝+6厘2毫5丝=6分2厘5毫	62.5
11两	6分8厘7毫半	6分8厘7毫5丝	6分2厘5毫+6厘2毫5丝=6分8厘7毫5丝	68.75
12两	7分半	7分5厘	6分8厘7毫5丝+6厘2毫5丝=7分5厘	75
13两	8分1厘2毫半	8分1厘2毫5丝	7分5厘+6厘2毫5丝=8分1厘2毫5丝	81.25
14两	8分7厘半	8分7厘5毫	8分1厘2毫5丝+6厘2毫5丝=8分7厘5毫	87.5
15两	9分3厘7毫半	9分3厘7毫5丝	8分7厘5毫+6厘2毫5丝=9分3厘7毫5丝	93.75
16两	10分	10分0厘	9分3厘7毫5丝+6厘2毫5丝=10分0厘	100

由表2可知,宋代衡不用铢作单位,而是用两、分、厘、毫、丝,1两等于10分,以下皆十进,10分等于100厘。

① 王文佩:《杨辉算书与HPM——以“加因代乘三百题”为例》,李兆华主编:《汉字文化圈数学传统与数学教育——第五届汉字文化圈及近邻地区数学史与数学教育国际学术研讨会论文集》,北京:科学出版社2004年版,第209页。

② 《宋史》卷68《律历一》,第1495—1496页。

③ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第457—458页。

杨辉在《日用算法》序言中称,为解决初学者“无启蒙日用”的状况,“以乘除加减为法,秤斗尺田为问。编诗括十有三首,立图草六十六问……分上下卷首”。^①可见,《日用算法》侧重于日常生活中所遇到的有关“秤、斗、尺、田”四个方面的数学问题,算法不外乘除加减,与《详解九章算法》和《杨辉算法》相比,《日用算法》的突出特点是“编诗括十有三首”。从思维学的角度讲,将算法诗歌化,便于记忆和传播,因而成为宋代普及乘除算法的一种重要方式。

如“立图草六十六问”(即66个问题)目前仅存一题三图草。其题云:“今有钱六贯八百文,买物一斤,问一两值几何?答曰:四百二十五文。”第一草曰:“斤价为实,置六贯八百文;四度折半,即是四次折半,得四百二十五;合问。”^②

用现代数学式表示,则为

$$\begin{array}{r} 3400 \quad 1700 \quad 0850 \quad 425 \\ 2 \overline{)6800} \rightarrow 2 \overline{)3400} \rightarrow 2 \overline{)1700} \rightarrow 2 \overline{)850} \rightarrow 425(\text{商})。 \end{array}$$

第二草曰:“斤价为实,置六贯八百文;如念法,于尾位求起,百上定十,先命八百为五十,后命六贯为三百七十五,共四百二十五;合问。”^③第三草曰:“斤价为实折半,取十六两为八两价;八归,是取八两为一两价。”^④第四草曰:“斤价为身,身为存十减六,斤价分为十六两,存留十两价,减去六两,于价贯上定百为一两之价。”^⑤第五草曰:“斤价为实,以十六两为法,除之,是以斤价分为十六处,求一两之价。”^⑥

华印椿将上述算草想象如图2:^⑦

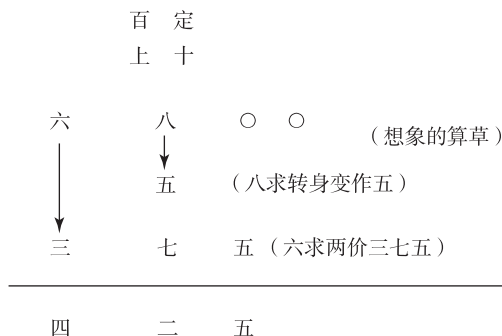


图2 华印椿想象的算草

草术中所言“念法”,即下面的八句口诀:“一求隔位六二五,二求退位一二五,三求一八七五记,四求改日二十五,五求三一二五是,六求两价三七五,七求四三七五置,八求转身变作五。”^⑧“八”以后“斤求两价念法”杨辉没有给出,后来朱世杰在《算法启蒙》一书中补充了“八”至“十五”念法,体现了“斤求两价”水平逐渐由1位向2位提升,同时,更加快了筹算向珠算全面转化的历史进程,所以,“斤求两价念法”对普及珠算尤其是推动元明时期商业的发展无疑起到了积极作用。如明代晋商兼珠算家王文素著《算学宝鉴》,书中所载“两化为斤口诀”,不仅发展了杨辉的“斤求两价念法”及元代朱世杰的“斤下留法”口诀(因为“两化为斤口诀”系专为十六两秤珠算而编制的),而且成为了后世

① 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第453页。

② 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第460页。

③ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第460页。

④ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第460页。

⑤ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第461页。

⑥ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第461页。

⑦ 华印椿:《简捷珠算法》,北京:中国财政经济出版社1979年版,第89页。

⑧ 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第460页。

人们所奉行的斤两法口诀,^①直到20世纪70年代之后人们普遍采用十两秤,杨辉“两化为斤口诀”才彻底完成了它的历史使命。

四、结论

综上所述,南宋商业经济的发展,必然促进数学计量科学的变革,杨辉算法即是适应这种经济发展需要的客观产物。在南宋,非规则山田的开造、各种斛制的出现、商业实用捷法的不断改进,都与数学计量紧密相连。杨辉算题深受这种商品经济发展形势的影响,商业色彩非常浓厚。如《日用算法》即以“秤斗尺田为问”^②。商业发展迫切需要既简便准确又易于操作的计算技术,于是,杨辉把改进筹算乘除计算技术和总结各种乘除捷算法作为其数学研究与数学教育工作之重点。从北宋的增成法到算盘的出现,杨辉记录和见证了这一运算工具改革的历史进程,比如,“九归新括”为算盘的早期歌诀。^③有学者称:从增成法的运算程式看,“九归新括是增成法演变而成”。^④

杨辉算书主要是为了教学之用。在南宋,算学已经退出官方教育体系,但是算学发展有其自身的客观规律,它的兴盛与衰落主要不是由政治因素而是由社会经济的发展状况来决定。如《田亩比类乘除捷法》与南宋山区农田的开发与建设有关,《乘除通变本末》展现南宋城镇商品消费市场的空前繁荣,等等。在此期间,为了维持商品生产和商品交换的顺利进行,没有一定的算学知识显然已经不能适应南宋商品经济快速发展的现实需要。正是在这样的历史条件下,习算者形成了一个十分广阔的需求市场。杨辉之所以受到杭州、苏州、台州等地民众的欢迎,主要就是因为其适应了这种市场发展的迫切需要。一句话,社会经济的发展状况决定着特定历史阶段数学进步的层次和水平。

On the *YangHuiSuanFa* and Several Measurement Mathematics Problems in the Field of the Southern Song Economic

Lu Bianting

Abstract: A new interpretation from the perspective of economic history on the *Yanghuisuanfa*, we will find that the southern Song dynasty in many areas of the economy are measured in the mathematics, like all kinds of shapes of measurement method, weighing scale in the daily business activities and the weight system and so on. Since the southern Song dynasty local governments and private over a longer period of time has not form a unified scale and weight system, which caused the negative impact on the development of commercial economy. Yang Hui discusses special methods, which has a positive influence on the development of the measuring mathematics in the southern Song dynasty. As an important phase of the evolution of the measuring mathematics, the southern Song dynasty experiences the transformation from the counsel to the abacus. *Yanghuisuanfa* has adapted to the objective need of measuring mathematics, which still has certain value for the development of the modern basic math and practical mathematics.

Key Words: *Yanghuisuanfa*; Economy; The Southern Song Dynasty; Measuring Mathematical

(责任编辑:丰若非)

① 张正明:《晋商兴衰史——称雄商界500年》,太原:山西古籍出版社1995年版,第332页。

② 郭熙汉:《杨辉算法导读》,第454页。

③ 中国数学会数学通报编委会编:《初等数学史》,北京:科学技术出版社1959年版,第15页。

④ 余宁旺主编:《中国珠算大全》,天津科学技术出版社1990年版,第158页。